École Supérieure de Commerce de Paris — CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE

Jeudi 5 mai 1988, de 8 h. à 12 h.

La présentation, ... sur 15 cm de large. : voir math 1 ou math 2

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable et expliciter une matrice diagonale D semblable à A.

Soit k un nombre entier naturel. Calculer D^k ; en déduire A^k.

2. On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{3u_n + 1}$

et la condition initiale $u_0 = c$, où c est un nombre réel strictement positif.

On considère en outre les suites (v_n) et (w_n) définies par les relations de récurrence : $\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases}$

et les conditions initiales : $v_0 = c$, $w_0 = 1$.

a) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer u_n à l'aide de v_n et de w_n.

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n et de c.

c) Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier la variation de f.

2. Montrer qu'il existe une fonction réelle g et une seule définie sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ telle que, pour tout point x de cet intervalle : $g(x) \ln g(x) = x$.

3. Étudier la variation de la fonction g. En particulier, déterminer la limite de g en $+\infty$. Tracer sur une même figure les courbes représentatives de f et de g.

4. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln g(x)}{\ln x} = 1$. En déduire lorsque x tend vers $+\infty$ la limite de $\dfrac{g(x) \ln x}{x}$.

EXERCICE 3

1. Une urne contient des boules rouges et des boules blanches. La proportion de boules rouges est égale à q, où $0 \leqslant q \leqslant 1$. On effectue n tirages indépendants, avec remise, dans cette urne et on note N la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées.

Déterminer la loi de probabilité de N. Calculer son espérance et sa variance.

2. Soit r un nombre entier naturel non nul. On suppose qu'on a $(r+1)$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_r$ et que, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant r$, la proportion de boules rouges contenues dans l'urne U_j vaut $\dfrac{j}{r}$. On choisit une urne au hasard (avec la même probabilité pour chaque urne d'être choisie) et on effectue dans cette urne n tirages indépendants, avec remise. On note N_r la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges ainsi tirées ; pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $p_r(k)$ la probabilité que N_r prenne la valeur k.

a) Trouver la loi de probabilité de N_r et calculer l'espérance de cette variable aléatoire.

b) Montrer que : $\lim\limits_{r \to +\infty} p_r(k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx$.

3. Soit $I_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx$. À l'aide d'intégrations par parties, calculer la valeur de I_k. En déduire que les nombres $\lim\limits_{r \to +\infty} p_r(k)$ ne dépendent pas de k.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail